

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
21 februarie 2016

CLASA a XII-a

1. Se consideră mulțimea $G = \{x \in \mathbb{Q}^* / x = a^2 + b^2, a, b \in \mathbb{Q}\}$. Arătați că operația de înmulțire a numerelor raționale determină pe G o structură de grup abelian.
2. Demonstrați că orice element inversabil din inelul $(\mathbb{Z}_{2016}, +, \cdot)$ este puterea a 2017-a a unui element inversabil din \mathbb{Z}_{2016} .
3. Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx$.
4. Fie $a > 0$ și $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietatea că $f(0) = f(a) = 1$. Fie $I = \int_0^a f(x) dx$.
Dacă $|f'(x)| \leq 1, \forall x \in (0, a)$ să se demonstreze că $|I - a| \leq \frac{a^2}{2}$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.